2.5.4 Kvadratické funkce s absolutní hodnotou

Předpoklady: 020501, 020503

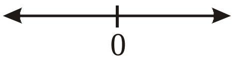
Pedagogická poznámka: Hlavním smyslem hodiny není učit studenty něco nového. Naopak by si všichni měli uvědomit, že nic dalšího než to, co již umí (nebo by měli umět), k řešení příkladů nepotřebují. Nic víc než toto na začátku hodiny obvykle neříkám. I studenti sami jsou pak překvapeni, že dokáží následující příklady při troše důslednosti vyřešit sami.

Pedagogická poznámka: Zadání příkladů je krátké, takže je stačí přepsat na tabuli a projektor používat spíše na postupné odkrývání řešení.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2|x|$.

Problém: předpis funkce obsahuje absolutní hodnotu.
Řešení: odstraníme ji pomocí intervalů jako u funkcí s absolutní hodnotou.
Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$|x|$: $x = 0$



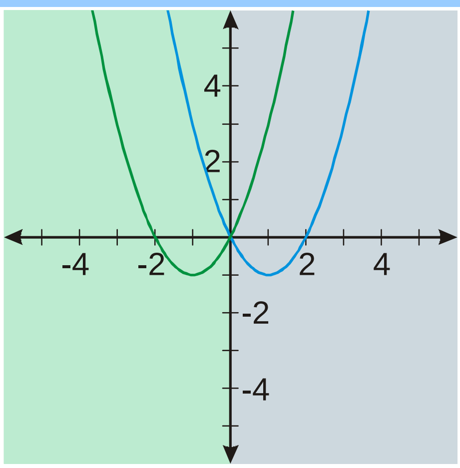
$\Rightarrow$ dva intervaly

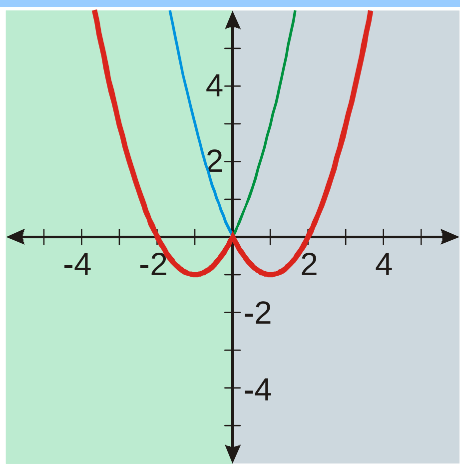
1) $x \in (-\infty; 0\rangle$ $\quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2(-x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$

2) $x \in \langle 0; \infty)$ $\quad x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$



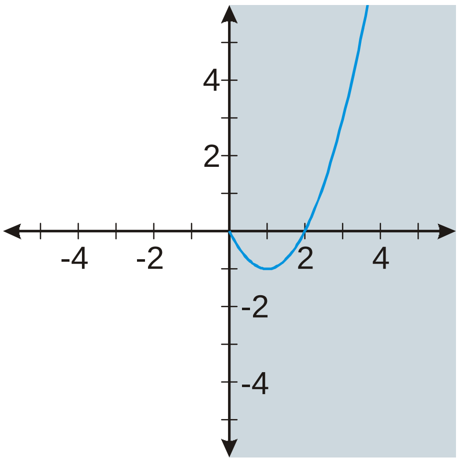


Poznámka: Tento graf již známe u funkce $y = (|x|-1)^2 - 1$. Můžeme si ukázat, že jde o stejné funkce i pomocí předpisu. Platí $x^2 = |x|^2$ (je jedno, zda znaménko zmizí už v absolutní hodnotě nebo až při umocňování). Předpis funkce pak můžeme upravit takto:
$y = x^2 - 2|x| = |x|^2 - 2|x| + 1 - 1 = (|x|-1)^2 - 1$. Z toho je již jasné, proč jsou oba grafy stejné.

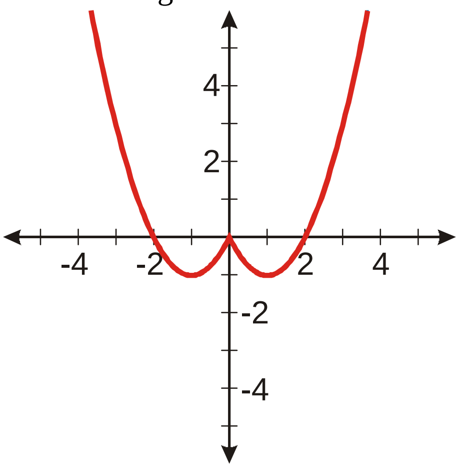
Př. 2: Najdi způsob, jak s využitím vlastností funkce $y = x^2 - 2|x|$ nakreslit její graf bez nutnosti rozdělování definičního oboru na intervaly.

Z předpisu je jasné, že funkce $y = x^2 - 2|x|$ je sudá (skládá se ze dvou sudých funkcí $y = x^2$ a $y = |x|$) $\Rightarrow$ stačí nakreslit její graf pro hodnoty $x \in \langle 0;\infty)$ a graf pro záporné hodnoty musí být osově souměrný podle osy *y*.
Pro nezáporná čísla *x* platí: $y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2x$

Kreslíme graf funkce $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = (x-1)^2 - 1 = f(x-1) - 1$, $f(x) = x^2$

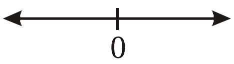


Dokreslíme graf v osové souměrnosti podle osy *y*:



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = x|x-2|$.

Stejný problém i stejné řešení jako předtím.
Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:
$|x-2|$: $x = 2$



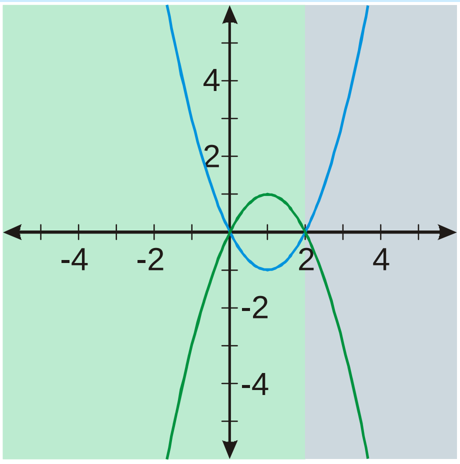
$\Rightarrow$ dva intervaly

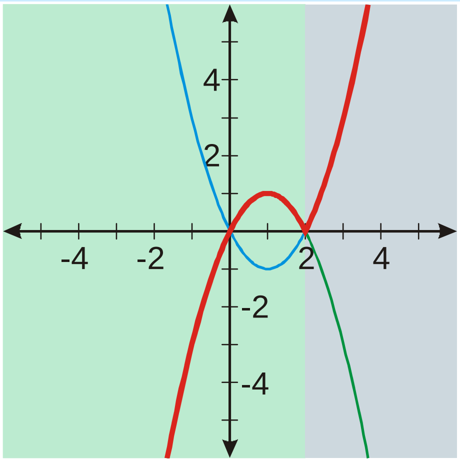
1) $x \in (-\infty;2)$ $\qquad x - 2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x + 2$

$y = x|x-2| = x(-x+2) = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$

2) $x \in \langle 2;\infty)$ $\qquad x - 2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x - 2$

$y = x|x-2| = x(x-2) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$





Pedagogická poznámka: Asi nejčastější chybou je rozdělení do intervalů podle nuly, které pak vyústí ve špatné vytažení výsledného grafu. Další mají problém s tím, že graf vychází z mínus nekonečna. Ukazujeme si na předpisu, že kvůli absolutní hodnotě jsou hodnoty funkce pro záporná *x* opravdu záporné.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2|x-2| + 1$.

Stejný problém i stejné řešení jako předchozí příklady.
Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:
$|x-2|:\ x = 2$

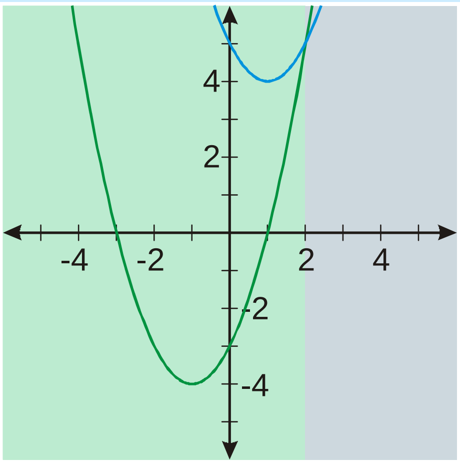
$\longleftrightarrow$ 2 $\Rightarrow$ dva intervaly

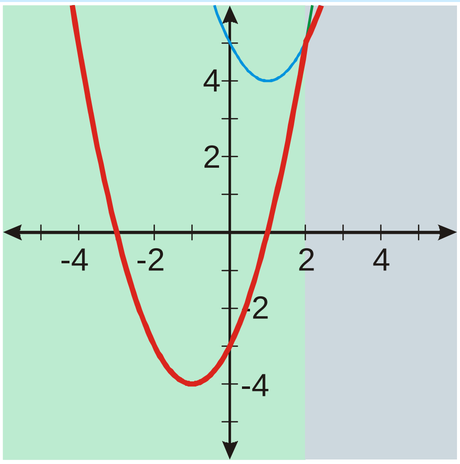
1) $x \in (-\infty; 2\rangle$ $\quad x - 2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x + 2$

$y = x^2 - 2|x-2| + 1 = x^2 + 2(x-2) + 1 = x^2 + 2x - 4 + 1 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x+1)^2 - 4$

2) $x \in \langle 2; \infty)$ $\quad x - 2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x - 2$

$y = x^2 - 2|x-2| + 1 = x^2 - 2(x-2) + 1 = x^2 - 2x + 4 + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4$





Př. 5: Nakresli graf funkce $y = x|2-x| + 2|x| - 2$.

Zjistíme nulové body absolutních hodnot:

$|2-x|:\ x = 2$ $\qquad\qquad$ $|x|:\ x = 0$

$\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty;0)$ $\qquad$ $2-x>0 \Rightarrow |2-x| = 2-x$ $\qquad$ $x<0 \Rightarrow |x| = -x$

$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(2-x) + 2(-x) - 2 = 2x - x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2$

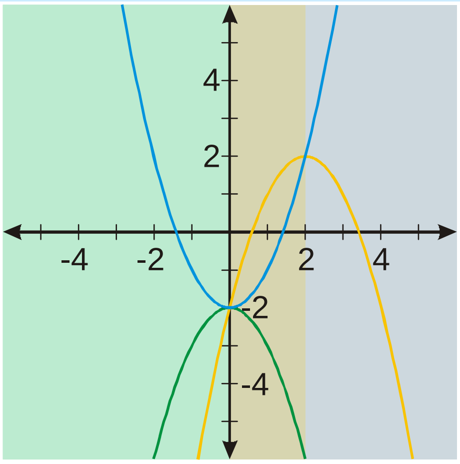
2) $x \in \langle 0;2 \rangle$ $\qquad$ $2-x>0 \Rightarrow |2-x| = 2-x$ $\qquad$ $x>0 \Rightarrow |x| = x$

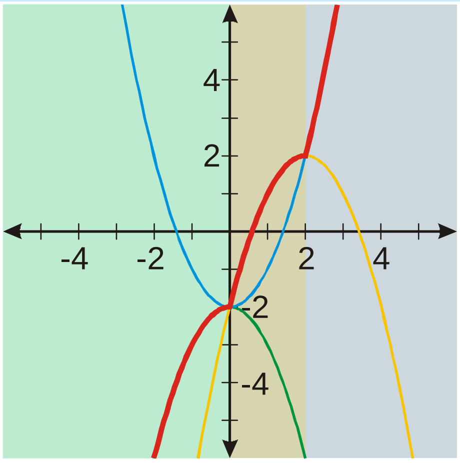
$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(2-x) + 2x - 2 = 2x - x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 4x - 2 =$

$= -(x^2 - 4x) - 2 = -(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) - 2 = -\left[(x-2)^2 - 4\right] - 2 = -(x-2)^2 + 2$

3) $x \in \langle 2;\infty)$ $\qquad$ $2-x<0 \Rightarrow |2-x| = -2+x$ $\qquad$ $x>0 \Rightarrow |x| = x$

$y = x|2-x| + 2|x| - 2 = x(x-2) + 2x - 2 = x^2 - 2x + 2x - 2 = x^2 - 2$





Př. 6: Petáková:
strana 29/cvičení 55 $\quad g_2; g_4; h_3; k_1$

Shrnutí: Kreslení grafů kvadratických funkcí s absolutní hodnotou je zcela stejné jako kreslení grafů lineárních funkcí s absolutní hodnotou.